# Lec 29 二阶线性常系数 ODE 的一般解法

## 29.1 预备知识

1. 设线性代数方程组:$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$, 令 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$,$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$, 若 $D \neq 0$, 则 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$,$x_2 = \dfrac{D_2}{D}$ 是方程组的解.
2. 线性代数齐次方程组:$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$, 若 $D \neq 0$, 则有唯一解 $x_1 = x_2 = 0$; 若 $D = 0$, 则存在无穷多组解.
3. 一阶线性 ODE 初值问题:$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 具有唯一解:
$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(s)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{s} p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s\right).$$
4. 二阶线性 ODE 初始问题:$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ y(x_0) = \alpha_0, y'(x_0) = \beta_0. \end{cases}$ 具有唯一解.

## 29.2 二阶线性常系数 ODE 的一般解法

我们回顾上节课所讲的二阶线性常系数 ODE 解的结构定理.

**定理 29.1 (二阶线性 ODE 解的结构)**

二阶 ODE 的形式通常为
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{2}$$
对应的齐次方程是
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3}$$
如果我们知道 (3) 的两个线性无关解 $y_1(x), y_2(x)$(有时候称为齐通解), 知道 (2) 的一个解 $y^*(x)$(有时候称为特解), 那么 (2) 的通解为 $y(x) = y^*(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, 其中 $C_1, C_2$ 为任意常数.

接下来我们介绍常数变易法.

**命题 29.1 (常数变易法)**

设 $y_1(x), y_2(x)$ 是齐次方程 (3) 的基本解组. 假设非齐次方程 (2) 也有形如

$$y_0(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

的特解, 但其中特函数 $c_1(x)$ 和 $c_2(x)$ 不再是常数, 而是特定函数. 对此式求导得

$$y_0'(x) = c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x). \tag{4}$$

为了避免出现 $c_1(x)$ 和 $c_2(x)$ 的高阶导数, 令

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0.$$

因此 $y_0(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ 继续导得

$$c_1(x)\left(y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)\right) + c_2(x)\left(y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)\right) = f(x).$$

由于 $y_1, y_2$ 是齐次方程 (3) 的解, 从上述式可得

$$c_1(x)\left(y_2(x)f(x)\right) = f(x). \tag{5}$$

因为 $y_1(x), y_2(x)$ 的 Wronski 行列式 $W(x) \neq 0$, 联立 (4) 和 (5) 可得

$$c_1'(x) = \frac{-y_2(x)f(x)}{W(x)}, \quad c_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}.$$

积分后可得

$$c_1(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(t)f(t)}{W(x)}\,\mathrm{d}t, \quad c_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)f(t)}{W(x)}\,\mathrm{d}t.$$

于是我们得到非齐次方程 (2) 的一个特解

$$y_0(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{W(x)} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

这里我们的目的是求出一个特解, 因此通过添加条件, 舍去积分常数, 只要求出一组非零特定函数 $c_1(x), c_2(x)$ 即可.

注 助教注: 常数变易法非常麻烦, 而且最终的解的结果并不便于记忆. 在一般处理问题的时候, 我们更倾向于使用其他方法. 我们通常会猜一些解的形式, 然后待定系数验证, 这个方法我们在作业中会有所体现.

**例 29.1**

1. $y'' + 6y' + 9y = 2023.$
2. $y'' + 3y' - 4y = \mathrm{e}^{2x}.$
3. $y'' + 2y' + 5y = 5\alpha_0.$

解 在下一部分中, 我们将会讲述这种,$p(x), q(x)$ 为常数的情况的解法, 在这题的解答里面我们先直接得出齐次方程的解, 略去过程.

1. 齐次方程的解为 $y_1(x) = \mathrm{e}^{-3x}, y_2(x) = x\mathrm{e}^{-3x}$, 观察得知 $y = \dfrac{2023}{9}$ 是非齐次方程的一个特解, 所以通解为 $y = C_1\mathrm{e}^{-3x} + C_2x\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{2023}{9}$.
2. 齐次方程的解为 $y_1(x) = \mathrm{e}^{x}, y_2(x) = \mathrm{e}^{-4x}$, 由常数变易法公式,$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{x} & \mathrm{e}^{-4x} \\ \mathrm{e}^{x} & -4\mathrm{e}^{-4x} \end{vmatrix} =$

$2\mathrm{e}^{-3x} \neq 0$, 因此 $x_0$ 可以不妨设为 0, 非齐次方程的一个特解为:

$$y^*(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-4x}}{2\mathrm{e}^{-3t}}\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{5}{12}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{12}\mathrm{e}^{-4x}.$$

因此非齐次方程的通解为 $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-4x} + \frac{5}{12}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{12}\mathrm{e}^{-4x} = C_3\mathrm{e}^x + C_4\mathrm{e}^{-4x} + \frac{5}{12}\mathrm{e}^{2x}$.

3. 齐次方程的解为 $y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos 2x, y_2(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin 2x$, 观察得知 $y = \alpha_0$ 是非齐次方程的一个特解, 所以通解为 $y = C_1\mathrm{e}^{-x}\cos 2x + C_2\mathrm{e}^{-x}\sin 2x + \alpha_0$.

我们补充一下对于常数 $p(x), q(x)$ 的情况的解法.

**命题 29.2 (二阶常系数 ODE 齐次方程的解法)**

这种方程可以写为:

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{7}$$

其中 $p, q$ 是常数. 假设方程 (7) 有形如 $y(x) = e^{\lambda x}$（$\lambda$ 是特定常数）的解, 则有

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda p e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0.$$

因此

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{8}$$

此式称为方程 (7) 的特征方程. 因此, 只有 $\lambda$ 是特征方程的一个根, 就对应二阶常系数线性方程 (7) 的解. 根据特征方程求根问题的特性, 分以下三种情况讨论:

$1^\circ$ 若特征方程 (8) 有不同的实根 $\lambda_1, \lambda_2$, 则 $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ 是方程 (7) 的解, 它们的 Wronski 行列式为 $W(x) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} \neq 0$, 因此是基本解组. 于是方程 (7) 的通解为

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (c_1, c_2 \text{ 是常数}). \tag{9}$$

$2^\circ$ 若特征方程 (8) 有一对复根 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$, 则 $y_1(x) = e^{\alpha x}e^{i\beta x}, y_2(x) = e^{\alpha x}e^{-i\beta x}$ 仍然是解, 只不过是复函数解. 为了得到实函数的解, 由 Euler 公式有

$$e^{i\lambda x} = e^{i(\alpha x + \beta x)} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right),$$
$$e^{-i\lambda x} = e^{-\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right),$$

根据方程解满足线性性可知

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{e^{\lambda x} + e^{\lambda_2 x}}{2},$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{2i},$$

因此 (7) 的通解为

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad (c_1, c_2 \text{ 是常数}). \tag{10}$$

$3^\circ$ 若特征方程 (8) 有一个实重根 $\lambda=-\dfrac{p}{2}$, 则方程 (7) 的解为

$$y_1(x)=e^{\lambda x},\quad y_2(x)=xe^{\lambda x}.$$

容易验证 $y_2(x)=xe^{\lambda x}$ 也是解, 它与 $e^{\lambda x}$ 线性无关. 于是 (7) 的通解为

$$y(x)=(c_1+c_2x)\,e^{\lambda x},\quad (c_1,c_2\text{ 是常数}). \tag{11}$$

## 29.3 例题

**例 29.2** 求解初值问题: $\begin{cases} yy''-(y')^2=y^4,\\ y(0)=1,y'(0)=0.\end{cases}$.

**解** 属于可降阶方程 (不是线性方程), 缺失 $x$, 令 $y'=u$, 则原方程变为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}-\dfrac{1}{y}u=y^3u^{-1}$. 令 $u^2=p(y)$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-\dfrac{2}{y}p(y)=2y^3$.

求解得 $p(y)=y^2(y^2+C_1), u^2=y^2(y^2+C_1)$. 代入 $y=1,y'=u=1$ 得 $C_1=0$, 所以 $u=y^2$. 所以 $y'=y^2(y'=-y^2$ 不符合初值条件), 所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}x\Rightarrow-\dfrac{1}{y}=x+C\Rightarrow y=\dfrac{1}{C-x}$, 代入 $y(0)=1$ 得 $C=1$, 代入 $y'(0)=1$ 得 $C=0$, 所以 $y=\dfrac{1}{1-x}$.

**例 29.3** 求解 $x^2y''-2xy'-4y=x^4$.

**解** 令 $x=\mathrm{e}^t,y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-t}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{1}{x}$. $y''=\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{1}{x^2}$.

由此代入原方程得 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-4y=\mathrm{e}^{4t}$. 这是一个常系数线性齐次方程, 特征方程为 $\lambda^2+3\lambda-4=0$, 解得 $\lambda=1,-4.y_1(t)=\mathrm{e}^t,y_2(t)=\mathrm{e}^{-4t},W(t)=5\mathrm{e}^{-3t}\neq0$, 不妨取 $x_0=1$.

$$y^*(t)=\int_1^t\frac{\mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-4s}-\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{e}^s}{5\mathrm{e}^{-3s}}\mathrm{e}^{4s}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{5}t\mathrm{e}^{4t}-\frac{6}{25}\mathrm{e}^{4t}+\frac{\mathrm{e}^5}{5}\mathrm{e}^{-t},$$

于是非齐次方程的通解为 $y(t)=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{4t}+\dfrac{1}{5}t\mathrm{e}^{4t}$. 代回 $t=\ln x$, 得 $y(x)=C_1x^{-1}+C_2x^4+\dfrac{1}{5}\ln x x^4$.

✍ 作业 ex6.1:8,9,10;12(2);ex6.2:4,5.